E.N.S.I. CHIMIE CENTRE 1982

P TB MATHÉMATIQUES I (2 h)

ATTENTION : La première et la deuxième partie de l'épreuve de mathématiques sont distribuées ensemble au début de l'épreuve.

Les candidats doivent rédiger chaque partie sur deux copies différentes.

Dans ce qui suit, K désignera indifféremment le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Soit $\mathfrak{M}_m^n(K)$ le K-espace vectoriel des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans K. Pour une telle matrice M nous noterons M_p^q l'élément de K qui figure à l'intersection de la p^e ligne et de la q^e colonne de M, et M^q la q^e colonne de M, c'est-à-dire la matrice $M^q \in \mathfrak{M}_m^1(K)$ dont l'élément figurant dans la p^e ligne est M_p^q, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant m$.

Nous noterons $\mathcal{E}(K)$ le K-espace vectoriel $\mathfrak{M}_3^1(K)$ des matrices à 3 lignes et 1 colonne à coefficients dans K. Pour tout $X \in \mathcal{E}(K)$ nous noterons simplement X_p l'élément de K qui figure dans la p^e ligne de X.

I

Soit $j : \mathcal{E}(K) \times \mathcal{E}(K) \to K$ la forme bilinéaire sur $\mathcal{E}(K)$ définie par :

$$\forall X \in \mathcal{E}(K), \forall Y \in \mathcal{E}(K), j(X, Y) = -X_1Y_1 - X_2Y_2 + X_3Y_3$$

Pour tout $X \in \mathcal{E}(K)$, on pose $q(X) = j(X, X)$. On dit que X est *isotrope* si et seulement si $q(X) = 0$.

1° Déterminer la matrice $J \in \mathfrak{M}_3^3(K)$ telle que pour tout X et pour tout Y appartenant à $\mathcal{E}(K)$ on ait :

$$j(X,Y) = {}^tXJY$$

où ${}^tX$ désigne la matrice transposée de X.

2° On se place à présent dans le cas où $K = \mathbb{R}$. Soit G un élément de $\mathfrak{M}_3^3(\mathbb{R})$ vérifiant la condition :

(C) $$\forall X \in \mathcal{E}(\mathbb{R}), \quad \forall Y \in \mathcal{E}(\mathbb{R}), \qquad j(GX, GY) = j(X, Y)$$

a. Montrer que la condition (C) équivaut à ${}^tGJG = J$.

b. Montrer que pour que G vérifie (C) il faut et il suffit que ses colonnes G^1, G^2, G^3 vérifient les égalités :

$$q(G^1) = q(G^2) = -1, \; q(G^3) = +1,$$
$$j(G^1, G^2) = j(G^1, G^3) = j(G^2, G^3) = 0.$$

c. Montrer que si G vérifie (C), son déterminant est égal à $+1$ ou à -1.

d. Montrer que l'ensemble $\mathcal{G}$ des éléments de $\mathfrak{M}_3^3(\mathbb{R})$ qui vérifient (C) et dont le déterminant est égal à $+1$ forme un groupe pour le produit des matrices.

Soit $M(t) \in \mathfrak{M}_m^n(\mathbb{C})$ une matrice dont les coefficients sont des fonctions de la variable réelle t. On dit que $M(t)$ est dérivable si et seulement si tous ses coefficients $M_p^q(t)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et dans ce cas la dérivée de $M(t)$ en $t_0 \in \mathbb{R}$ est la matrice $N = \dfrac{dM}{dt}(t_0)$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$ vérifiant $1 \leqslant p \leqslant m$ et $1 \leqslant q \leqslant n$ on ait $N_p^q = \dfrac{dM_p^q}{dt}(t_0)$. On pourrait admettre que si $A(t) \in \mathfrak{M}_k^m(\mathbb{C})$ et $B(t) \in \mathfrak{M}_m^n(\mathbb{C})$ sont dérivables il en est de même pour le produit $A(t)\,B(t)$ et que l'on a $\dfrac{d}{dt}(A(t)\,B(t)) = \dfrac{dA}{dt}(t)\,B(t) + A(t)\,\dfrac{dB}{dt}(t)$.

3° Soit $G(t) \in \mathfrak{M}_3^3(\mathbb{R})$ une matrice fonction de la variable réelle t, dérivable, et telle que :

— pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G(t) \in \mathcal{G}$,

— on ait $G(0) = I$, où I est la matrice unité de $\mathfrak{M}_3^3(\mathbb{R})$.

Montrer que $J\,\dfrac{dG}{dt}(0)$ est antisymétrique.

4° Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des matrices $B \in \mathfrak{M}_3^3(\mathbb{R})$ telles que JB soit antisymétrique.

a. Montrer que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathfrak{M}_3^3(\mathbb{R})$.

b. Soit L l'application de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_3^3(\mathbb{R})$ qui à $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$ élément de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ associe

.../...

$$L(\Omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $L(\Omega)$ appartient à $\mathfrak{L}$ et que L est un isomorphisme de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{L}$.

c. Soit $\Omega \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, $\Omega \neq 0$. Calculer $L(\Omega)\Omega$. Calculer le rang de $L(\Omega)$. En déduire le sous-espace propre de $L(\Omega)$ associé à la valeur propre 0.

d. Calculer le polynôme caractéristique de $L(\Omega)$. En déduire que pour que $L(\Omega)$ soit diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ il faut et il suffit que $q(\Omega) \neq 0$. Dans ce cas, montrer que les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres non nulles sont isotropes.

II

Soit $\Omega \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ tel que $q(\Omega) \neq 0$, et $X(t)$ un élément de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ fonction de la variable réelle t, dérivable. On considère l'équation :

$$\frac{dX}{dt}(t) = L(\Omega)\, X(t). \tag{1}$$

1° Montrer que si $X(t)$ vérifie (1) et si λ est un nombre réel quelconque, alors $Z(t) = X(\lambda t)$ vérifie l'équation $\frac{dZ}{dt}(t) = L(\lambda\Omega)Z(t)$ et l'on a $Z(0) = X(0)$. On pourra donc supposer dorénavant que $|q(\Omega)| = 1$, quitte à remplacer Ω par $\Omega / \sqrt{|q(\Omega)|}$ dans l'équation (1).

2° On suppose que $q(\Omega) = -1$.

a. Déterminer $U \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ tels que $L(\Omega)U = -U$, $L(\Omega)V = V$ et $U_3 = V_3 = \sqrt{1 + (\Omega_3)^2}$.

b. Soit P la matrice carrée d'ordre 3 dont les colonnes sont $P^1 = \Omega$, $P^2 = U$ et $P^3 = V$. Soit P^{-1} la matrice inverse de P.

Montrer que pour que $X(t)$ vérifie (1) il faut et il suffit que $Y(t) = P^{-1}X(t)$ vérifie $\frac{dY}{dt}(t) = DY(t)$, où D est une matrice diagonale que l'on déterminera. En déduire que $X(t) = P\Delta(t)P^{-1}X(0)$, où $\Delta(t)$ est une matrice diagonale fonction de t que l'on déterminera.

c. Soit Q la matrice carrée d'ordre 3 dont les colonnes sont $Q^1 = \Omega$, $Q^2 = \frac{1}{2}(U - V)$, $Q^3 = \frac{1}{2}(U + V)$.

Montrer que Q appartient à $\mathcal{G}$. Calculer la matrice $A(t)$ telle que $P\Delta(t)P^{-1} = QA(t)Q^{-1}$. Montrer que $A(t)$ appartient à $\mathcal{G}$. En déduire que $G(t) = QA(t)Q^{-1}$ appartient aussi à $\mathcal{G}$ et que l'on a $G(0) = I$ et $\frac{dG}{dt}(0) = L(\Omega)$.

3° On suppose que $q(\Omega) = +1$, et que $|\Omega_3| \neq 1$.

On adapte la méthode du II.2° de la façon suivante :

a. Déterminer $U \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ et $V \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ tels que $L(\Omega)U = -iU$, $L(\Omega)V = iV$ et $U_3 = V_3 = \sqrt{(\Omega_3)^2 - 1}$.

b. Soit P la matrice carrée d'ordre 3 dont les colonnes sont $P^1 = U$, $P^2 = V$ et $P^3 = \Omega$. Montrer que si $X(t)$ vérifie (1) on a $X(t) = P\Delta(t)P^{-1}X(0)$, où $\Delta(t)$ est une matrice diagonale fonction de t que l'on déterminera.

c. Soit Q la matrice carrée d'ordre 3 dont les colonnes sont $Q^1 = \frac{1}{2}(U + V)$, $Q^2 = \frac{1}{2i}(U - V)$, $Q^3 = \Omega$.

Montrer que Q appartient à $\mathcal{G}$. Calculer la matrice $A(t)$ telle que $P\Delta(t)P^{-1} = QA(t)Q^{-1}$. Montrer que $A(t)$ et $G(t) = QA(t)Q^{-1}$ appartiennent à $\mathcal{G}$ et que l'on a $G(0) = I$ et $\frac{dG}{dt}(0) = L(\Omega)$.

4° On suppose que $q(\Omega) = +1$, et que $\Omega_3 = +1$.

Montrer que si $X(t)$ vérifie (1), on a $X(t) = A(t)X(0)$, où $A(t)$ est la matrice calculée à la question précédente, et que $A(0) = I$ et $\frac{dA}{dt}(0) = L(\Omega)$. En déduire la matrice $A'(t)$ telle que $X(t) = A'(t)X(0)$ lorsque $X(t)$ vérifie (1) et que $q(\Omega) = +1$ avec $\Omega_3 = -1$.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail